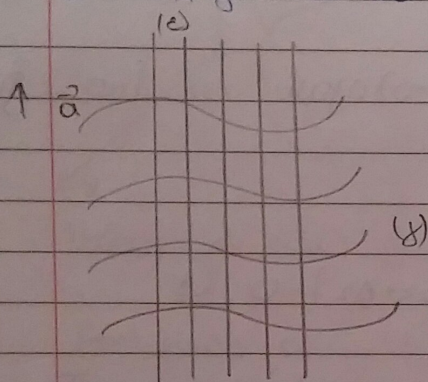


15/05/2018
Αν. Γεωμετρία

► Επιφάνειες είναι χώρο $\mathbb{R}^3$

① Κυλινδρικές Επιφάνειες

Ορισμός: Μια επιφάνεια λέγεται κυλινδρική όταν παράγεται από μια ευθεία (ϵ) η οποία κινείται έτσι ώστε να είναι συνεχώς παράλληλη προς ένα σταθερό διάνυσμα $\vec{a} = (a, b, \gamma)$ και να συναντά μια σταθερή καμπύλη.



Η ευθεία (ϵ) ονομάζεται γενέτρηρα της επιφάνειας. ενώ η σταθερή καμπύλη ονομάζεται οδηγός της κυλινδρικής επιφάνειας.

Πρόβλημα: Να βρεθεί η εξίσωση της κυλ. επιφ. με γενέτρες παράλλες προς ένα διάνυσμα $\vec{a}$ και οδηγό την καμπύλη

$$(\gamma): \{f_1(x, y, z) = 0, f_2(x, y, z) = 0\}$$

Απάντηση: Ας υποθέσουμε,

$$(\epsilon) \begin{cases} A_1x + B_1y + \Gamma_1z + \Delta_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + \Gamma_2z + \Delta_2 = 0 \end{cases}$$

είναι οι εξισώσεις μιας ευθείας που είναι παράλληλη προς το $\vec{a}$. Προσέχουμε για τις διάφορες τιμές των λ, μ . οι ευθείες

$$(\epsilon)_{\lambda, \mu}: \begin{cases} A_1x + B_1y + \Gamma_1z + \Delta_1 = \lambda \\ A_2x + B_2y + \Gamma_2z + \Delta_2 = \mu \end{cases}$$

Είναι παράλλες προς τον (ε) πρέπει να προσδιορίσουμε
 για ποιες τιμές των λ, μ οι (ελμ) τέλνουν την κο-
 ινότητα (γ). Έτσι ώστε έχουμε το σύστημα

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + \Gamma_1z + \Delta_1 = \lambda \\ A_2x + B_2y + \Gamma_2z + \Delta_2 = \mu \\ f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} 4 \text{ εξισώσεις ως} \\ \text{προς 3-συντεταγμένες } x, y, z \end{array}$$

Απολύνοντας τα x, y, z καταλήγουμε σε μια εξίσωση
 της μορφής $\phi(\lambda, \mu) = 0$

ή, ισοδύναμα

$$\phi(A_1x + B_1y + \Gamma_1z + \Delta_1, A_2x + B_2y + \Gamma_2z + \Delta_2) = 0 \quad (*)$$

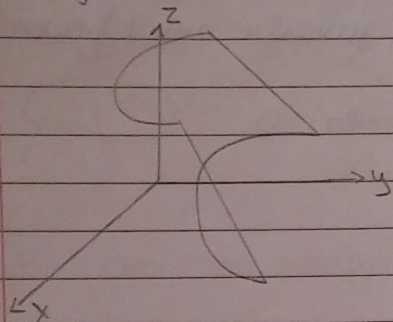
Η τελευταία σχέση περιγράφει την επιφάνεια που ζητούμε.

Συμπέρασμα: κάθε εξίσωση της μορφής $(*)$ όπου
 $\vec{\alpha} = (A_1, B_1, \Gamma_1) \times (A_2, B_2, \Gamma_2) \neq 0$ περιγράφει κυλ. επιφάνεια
 με γενέτρες παράλληλες προς το διάνυσμα $\vec{\alpha}$

Παρατήρηση: Η εξίσωση $f(x, y) = 0$ στον χώρο $\mathbb{R}^3$ περι-
 τάνει κυλινδ. επιφάνεια με γενέτρες παράλλες προς τον
 άξονα oz . κάθε εξίσωση από την οποία λείπει
 μια μεταβλητή περιγράφει κυλ. επιφ. με γενέτρες παράλλες
 προς τον άξονα που χαρακτηρίζει η μεταβλητή που λείπει.

Παράδειγμα: να βρεθεί εξίσωση της κοίτης. Επειδ. που έχει πόση την παραβολή
 $(\gamma) : \{ y = x^2 - 5x + 6, z = 0 \}$

και γενέτορες παρ/τες προς το διανυσμα $\vec{\alpha} = (3, -3, 5)$



Είναι άρα ότι :

$$(E) : \begin{cases} x = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} \end{cases}$$

Είναι παρ/τη προς το $\vec{\alpha} = (3, -3, 5)$

Εξισώνοντας η (E) γράφεται ως εξής: $(E) : \begin{cases} x + y = 0 \\ 5y + 3z = 0 \end{cases}$

Επομένως οι $(E)_{\lambda, \mu} : \begin{cases} x + y = \lambda \\ 5y + 3z = \mu \end{cases}$

Είναι παρ/τες προς το $\vec{\alpha}$ πρέπει να προσδιορίσουμε για ποια λ, μ η $(E)_{\lambda, \mu}$ τέλνει την κοίτη (γ) . Έτσι παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} y = x^2 - 5x + 6 \\ z = 0 \\ x + y = \lambda \\ 5y + 3z = \mu \end{cases}$$

Από τις 3 τελευταίες εξισώσεις $\Rightarrow$

$$\begin{cases} z = 0 \\ x = \lambda - \frac{\mu}{5} \\ y = \frac{\mu}{5} \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας στην πρώτη $\Rightarrow$

$$\left(\lambda - \frac{\mu}{5} \right)^2 - 5 \left(\lambda - \frac{\mu}{5} \right) + 6 - \frac{\mu}{5} = 0$$

Από την τελευταία εξίσωση λυβόνομε η εξίσωση της επιφάνειας που ζητάμε είναι:

$$\left(x - y - \frac{5y + 3z}{5} \right)^2 - 5 \left(x - y - \frac{5y + 3z}{5} \right) + 6 - \frac{5y + 3z}{5} = 0$$

Προβλημα: Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση

$$z^2 - 4xy - 2yz + 2xz + 1 = 0$$

προσδιορίζει κυλινδρική επιφάνεια.

Απάντηση: Θα προσπαθήσουμε να γράψουμε την εξίσωση στην μορφή

$$f(A_1x + B_1y + C_1z + D_1, A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

Έχουμε,

$$0 = z^2 - 4xy - 2yz + 2xz + 1$$

$$= z(2 - 2y) + 2x(2 - 2y) + 1$$

$$= (z + 2x)(2 - 2y) + 1.$$

Αρα η επιφάνεια είναι κυλινδρική με γενέτειρα παράλληλη προς την ευθεία
$$\begin{cases} z + 2x = 0 \\ z - 2y = 0 \end{cases}$$

Εξάσκηση: Να βρεθεί η προβολή της καμπύλης

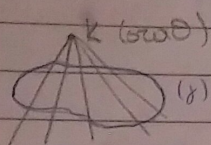
$$(\gamma) : \{x^2 + y^2 = 1, z = y - 1\} \quad \text{στο επίπεδο } Oyz$$

Απάντηση: Ένα διάνυσμα κάθετο στο Oxz επίπεδο είναι το $\vec{a} = (0, 1, 0)$. Η προβολή που ζητάμε προκύπτει από την τομή του επιπέδου Oxz με την κυλ. επιφ. που έχει ως άξονα την καμπύλη (γ) και γενέτειρες παράλλες προς το $\vec{a}$. Ακολουθώντας την γνωστή διαδικασία η ζητούμενη προβολή είναι ο κύκλος

$$\begin{cases} x^2 + (z+1)^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \square$$

② Κωνικές Επιφάνειες:

Ορισμός: Μια επιφάνεια λέγεται κωνική όταν παράγεται από μια ευθεία η οποία κινείται έτσι ώστε να διέρχεται από σταθερό σημείο και να συναντάει μια σταθ. καμπύλη.



Το σημείο K ονομάζεται κορυφή της κωνικής επιφ. και η σταθ. καμπύλη ονομάζεται οδηγός της κωνικής επιφ.

Η ευθεία που παράγει την επιφάνεια λέγεται γενέτειρα.

Πρόβλημα: Να βρεθεί η εξίσωση της κωνικής επιφ. με κορυφή το $K(x_0, y_0, z_0)$ και οδηγό καμπύλη

$$(\gamma): \{ f_1(x, y, z) = 0, f_2(x, y, z) = 0 \}$$

Απάντηση: Αφού η γενέτειρα διέρχεται από το $K(x_0, y_0, z_0)$ θα έχει εξίσωση:

$$(E): \left\{ \frac{x-x_0}{a} - \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{\delta} \right\}$$

πρέπει να προσδιορίσουμε τα a, b, δ ώστε η (E) να διέρχεται από (γ) . Έτσι λαμβάνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \\ \frac{x-x_0}{a} - \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{\delta} \end{cases} \iff \begin{cases} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \\ y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0) \\ z - z_0 = \frac{\delta}{a}(x - x_0) \end{cases}$$

Με απαλοιφή των x, y, z καταλήγουμε σε μια εξίσωση της μορφής

$$\phi\left(\frac{b}{a}, \frac{\delta}{a}\right) = 0 \iff F(a, b, \delta) = 0 \quad (*)$$

όπου η F είναι ομογενής ως προς α, β, γ . Οπότε
 θέτουμε $x-x_0=t\alpha$, $y-y_0=t\beta$, $z-z_0=t\gamma$.
 η $\odot$ λαμβάνει την μορφή

$$0 = F(\alpha, \beta, \gamma) = F\left(\frac{1}{t}(x-x_0), \frac{1}{t}(y-y_0), \frac{1}{t}(z-z_0)\right) \\ = \left(\frac{1}{t}\right)^k F(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$$

Άρα η εξίσωση της επιφ. που ζητάμε είναι

$$F(x-x_0, y-y_0, z-z_0) = 0 \text{ όπου } F \text{ ομογενής}$$

$\odot$ Ορισμός: Μια συνάρτηση $F(\cdot, \cdot, \cdot)$ λέγεται ομογενής με
 βαθμό k αν ισχύει
 $F(t\alpha, t\beta, t\gamma) = t^k F(\alpha, \beta, \gamma)$

Παρατήρηση: κάθε εξίσωση της μορφής

$$F(A_1x+B_1y+\Gamma_1z+\Delta_1, A_2x+B_2y+\Gamma_2z+\Delta_2, A_3x+B_3y+\Gamma_3z+\Delta_3) = 0$$

της οποίας η F είναι ομογενής βαθμό $k \neq 0$

και

A_1	B_1	Γ_1	$\neq 0$
A_2	B_2	Γ_2	
A_3	B_3	Γ_3	

παριστάει κυκλική τομή με κέντρο το έγκλειο τοίνος
 των επιπέδων

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+\Gamma_1z+\Delta_1=0 \\ A_2x+B_2y+\Gamma_2z+\Delta_2=0 \\ A_3x+B_3y+\Gamma_3z+\Delta_3=0 \end{cases}$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί η εξίσωση της κυνικής επιφ. με κορυφή $K(0,0,1)$ και άξονα την καμπύλη

$$(C): \{x^2+y^2=1, z=0\}$$

Απάντηση: Η γενική έχει εξίσωση

$$(E): \left\{ \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-1}{\gamma} \right\}$$

Για να προσδιοριστούν οιες ευθείες διέρχονται από την (C) , θεωρούμε το σύστημα.

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \\ y=\frac{b}{a}x \\ z=1+\frac{\gamma}{a}x \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{με αντικατάσταση} \\ \text{των } x, y, z \\ \Rightarrow \end{matrix} \quad \begin{matrix} a^2+b^2-\gamma^2=0 \quad (*) \\ \text{δηλ.} \\ F(a,b,\gamma)=a^2+b^2-\gamma^2 \end{matrix}$$

Ενδεώς για να βρούμε την εξίσωση (E) έχουμε:

$$\left\{ x=at, y=bt, z=\gamma t+1 \right\} \quad (**)$$

Από $(*)$ & $(**)$ $\Rightarrow x^2+y^2=(z-1)^2$ αυτή είναι η κυνική επιφάνεια που ζητούμε.

Παράδειγμα: Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$9y^2-11z^2+6yz-18xz+6y-72x-58z-47=0 \quad (**)$$

παριστάει κυνική επιφάνεια.

Απάντηση: Δεσφάμε την $F(a,b,\gamma)=(**)$

Για να παριστάει η εξίσωση κυνική επιφ. πρέπει να υπάρχουν a,b,γ τέτοια ώστε η

$$F(x-a, y-b, z-\gamma) \text{ να είναι ολοκλήρωτο.}$$

Derivée

$$x = x - a \quad y = y - b \quad z = z - \gamma$$

(car)

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= 9x^2 + 11z^2 + 6yz - 18xz + (18b + 6\gamma + 6)z + \\ &\quad + (-22\gamma + 6b - 18a - 58)z + (-18\gamma - 72)x \\ &\quad + (9b^2 - 11\gamma^2 + 6b\gamma - 18a\gamma + 6b - 72a - 58\gamma - 47) \end{aligned}$$

Pour que F soit nul, on a

$$\begin{cases} 18b + 6\gamma + 6 = 0 \\ -22\gamma + 6b - 18a - 58 = 0 \\ -18\gamma - 72 = 0 \\ 9b^2 - 11\gamma^2 + 6b\gamma - 18a\gamma + 6b - 72a - 58\gamma - 47 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} a &= 2 \\ b &= 1 \\ \gamma &= -4 \end{aligned}$$